DE
MOTU CORPORUM — ab

Liber PRIMUS

SECT. I.

De Methodo Rationum primarum & ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur. — b.

LEMMA I.

Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem ~~dato~~ quovis finito tempore constanter tendunt & ~~eo pacto~~ propius ad invicem acced~~ere possunt~~unt quam pro data quavis differentia; fiunt ultimo æquales. b

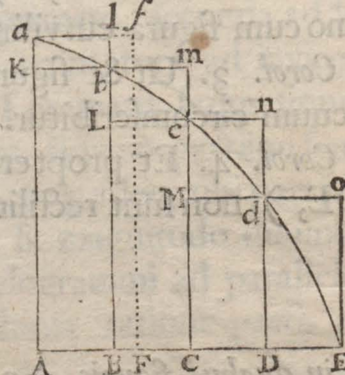
ante finem temporis illius

Si negas, sit earum ultima differentia *D*. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quam pro data differentia *D*: contra hypothesin.

Lem-

Lemma II.

Si in figura quavis AacE *rectis* Aa, AE, *& curva* AcE *comprehensa, inscribantur parallelogramma quotcunq;* Ab, Bc, Cd, &c. *sub basibus* AB, BC, CD, &c. *æqualibus, & lateribus* Bb, Cc, Dd, &c. *figuræ lateri* Aa *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* aKbl, bLcm, cMdn, &c, *Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes, quas habent ad se invicem figura inscripta* AKbLcMdD, *circumscripta* AalbmcndoE, *& curvilinea* AabcdE, *sunt rationes æqualitatis.* k. ω. x



dico

Nam figuræ inscriptæ & circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum $Kl + Lm + Mn + Do$, hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi *K b* & altitudinum summa *A a*, id est rectangulum *A B l a*. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus A B in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo, per Lemma I, figura inscripta & circumscripta, & multo magis figura curvilinea intermedia, fiunt ultimo æquales. *Q. E. D.*

Lemma III.

*Eædem rationes ultimæ sunt etiam æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines A*B, B*C*, C*D*, *&c. sunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.* h rationes

Sit enim *A F* æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum *F A a f*. Hoc erit majus quam differentia figuræ inscriptæ & figuræ circumscriptæ, at latitudine sua A F

 in

in infinitum diminuta, minus fiet quam datum quodvis rectangulum.

Corol. 1. Hinc summa ultima parallelogrammorum evanescentium coincidit omni ex parte cum figura curvilinea.

Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evanescentium arcuum *ab*, *bc*, *cd*, *&c.* comprehenditur, coincidit ultimo cum figura curvilinea.

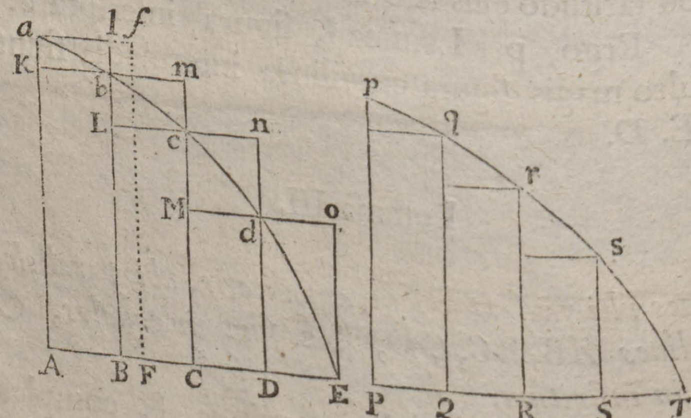
Corol. 3. Ut & figura rectilinea quæ tangentibus eorundem arcuum circumscribitur.

Corol. 4. Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros *ac*E,) non sunt rectilineæ, sed rectilinearum limites curvilinei.

Lemma IV.

Si in duabus figuris AacE, PprT, *inscribantur (ut supra) duæ parallelogrammorum series, sitq; idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in una figura ad parallelogramma in altera, singulorum ad singula, sint eædem; dico quod figuræ duæ* AacE, PprT, *sunt ad invicem in eadem illa ratione.* h

dico



Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula, ita (componendo) fit summa omnium ad summam omnium, & ita figura ad ad figuram; existente nimirum figura priore (per Lemma III.) ad summam priorem, & posteriore figura ad summam posteriorem in ratione æqualitatis. Λ

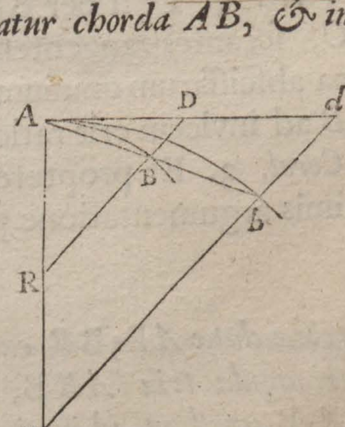
Corol. Hinc si duæ cujuscunq; generis quantitates in eundem partium numerum utcunq; dividantur, & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræq; suo ordine ad cæteras; erunt tota ad invicem in eadem illa data ratione. Nam si in Lemmatis hujus figuris sumantur parallelogramma inter se ut partes, summæ partium semper erunt ut summæ parallelogrammorum; atq; adeo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultima ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id est (per hypothesin) in ultima ratione partis ad partem.

Lemma V.

*Similium figurarum latera omnia, quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea, & areæ sunt in duplicata ratione laterum.** h

Lemma VI.

Si arcus quilibet positione datus AB subtendatur chorda AB, & in puncto aliquo A, in medio curvaturæ continuæ, tangatur a recta utrinq; producta AD; dein puncta A, B ad invicem accedant & coeant; dico quod angulus BAD sub chorda & tangente contentus minuetur in infinitum & ultimo evanescet. k w x



Dico

Ψ ~~Nam producatur AB ad b & AD ad d, & punctis A, B coeuntibus, nullaq; adeo ipsius Ab parte AB jacente amplius intra curvam, manifestum est quod hæc recta Ab~~

Ψ Nam si angulus ille non evanescit, continebit arcus AB cum tangente AD angulum rectilineo aequalem, et propterea curvatura ad punctum A non erit continua, contra hypothesin.

~~vel~~

* Hoc patet ex Cor. 4. Lem. 3 et Euc. Elem. V 12 Ψ VI. 20 ~~[illegible]~~ (112)

~~vel coincidet cum tangente Ad, vel ducetur inter tangentem & curvam. Sed casus posterior est contra naturam Curvaturæ, ergo prior obtinet. Q. E. D.~~

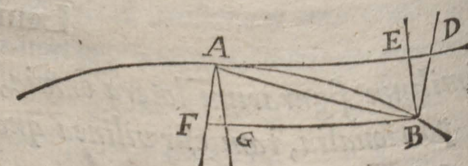
Dico

Lemma. VII.

Iisdem positis, dico quod ultima ratio arcus, chordæ & tangentis ad invicem est ratio æqualitatis. Vide Fig. *Lem. 6 & 8 vi.*

Nam producantur semper A B & A D ad b & d & secanti B D* parallela agatur b d. Sitq; arcus A b semper similis arcui A B. Et punctis A, B coeuntibus, angulus d A b, per Lemma superius, evanescet; adeoq; rectæ A b, A d & arcus intermedius A b coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hisce semper proportionales rectæ A B, A D, & arcus intermedius A B rationem ultimam habebunt æqualitatis. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde si per B ducatur tangenti parallela *B F* rectam quamvis A *F* per A transeuntem perpetuo secans in F, hæc BF ultimo ad arcum evanescentem A B rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo A F B D, rationem semper habet æqualitatis ad A D.



Corol. 2. Et si per B & A ducantur plures rectæ B E, *B D*, A F, A *G*, secantes tangentem A D & ipsius parallelam *B F*, ratio ultima abscissarum omnium A D, A E, *B F*, *B G*, chordæq; & arcus A *B* ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ in omni de rationibus ultimis argumentatione pro se invicem usurpari possunt.

Lemma VIII.

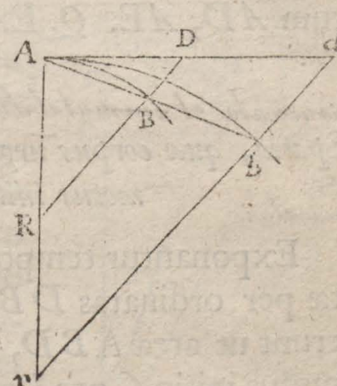
Dico

Si rectæ datæ A R, B R *cum arcu* A B, *chorda* A B *& tangente* A D, *triangula tria* A R B, A R B, A R D *constituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evanescentium est similitudinis, & ultima ratio æqualitatis.* k w x

Nam

* Ubi tamen notandum secantem BD angulos cum tangente, et chorda, ad quos angulus evanescens BAD rationem habeat infinitesimam, semper efficere debere, alioqui non obtineret Lemma, quod et in sequentibus intelligendum. (NH)

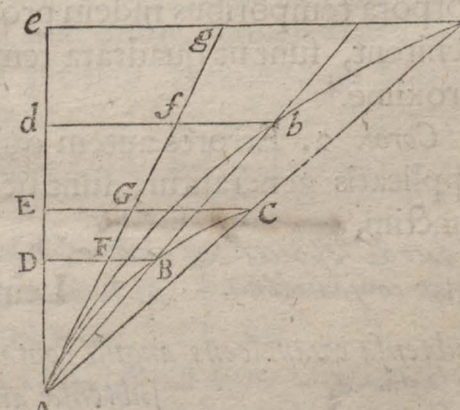
Nam producantur semper AB, A*D*, A*R* ad *b*, *d* & *r*. Ipsi *RD* agatur parallela *rbd*, & arcui AB similis ducatur arcus A*b*. Coeuntibus punctis A, B, angulus *b*A*d* evanescet, & propterea triangula tria *rAb*, *rAb*, *rAd* coincident, suntq; eo nomine similia & æqualia. Unde & hisce semper similia & proportionalia *RAB*, *RAB*, *RAD* fient ultimo sibi invicem similia & æqualia. *Q. E. D.*



Corol. Et hinc triangula illa in omni de rationibus ultimis argumentatione pro se invicem usurpari possunt.

Lemma IX.

Si recta AE & Curva AC positione datæ se mutuo secent in angulo dato A, & ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur BD, EC, curvæ occurrentes in B, C; dein puncta B, C accedant ad punctum A: dico quod areæ triangulorum ADB, AEC erunt ultimo ad invicem in duplicata ratione laterum. Dico



Etenim in *AD* producta capiantur semper *Ad*, *Ae* ipsis *AD*, *AE* proportionales, & erigantur ordinatæ *db*, *ec* ordinatis *DB*, *EC* parallelæ (~~& proportionales. Producatur AC ad c,~~) quæ occurrant ipsis AB AC productis in b & c, ducatur curva A*bc* ipsi A*BC* similis, & recta A*g* tangatur curva utraq; in A*; & secantur ordinatim applicatæ in *F*, *G*, *f*, *g*. Tum coeant puncta *B*, *C* cum puncto A, & angulo *c* A*g* evanescente, coincident areæ curvilineæ A*bd*, A*ce* cum rectilineis A*fd*, A*ge*, adeoq; per Lemma V, erunt in duplicata

plicata ratione laterum Ad, Ae: Sed his areis proportionales semper sunt areæ ABD, ACE, & his lateribus latera AD, AE. Ergo & areæ ABD, ACE sunt ultimo in duplicata ratione laterum AD, AE. *Q. E. D.*

sive vis illa determinata et immutabilis sit, sive eadem continuo augeatur, vel continuo diminuatur,

Lemma X.

Spatia, quæ corpus urgente quacunq; vi ~~regulari~~ finita describit, sunt ipso motus initio in duplicata ratione temporum. f

Exponantur tempora per lineas AD, AE, & velocitates genitæ per ordinatas DB, EC, & spatia his velocitatibus descripta erunt ut areæ ABD, ACE his ordinatis descriptæ, hoc est ipso motus initio (per Lemma IX) in duplicata ratione temporum AD, AE. *Q. E. D.*

Corol. 1. Et hinc facile colligitur, quod corporum similes similium figurarum partes temporibus proportionalibus describentium errores, qui viribus æqualibus ~~in partibus istis~~ ad corpora similiter applicatis generantur, & mensurantur per distantias a locis figurarum, ad quæ corpora temporibus ijsdem proportionalibus absq; viribus istis pervenirent, sunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proxime.*

Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus similiter applicatis generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim. ~~[illegible]~~

Cor. 3. Idem [illegible] est de Spatiis [illegible] quæ [illegible] [illegible] viribus [illegible]. Hæc [illegible] [illegible] initio ut vires et quadrata [illegible] conjunctim.

Lemma XI.

Cor 4. $V \propto \frac{S}{T^2}$. Cor. 5. $T^2 \propto \frac{S}{V}$

in curvis [illegible] punctum contactus [illegible]

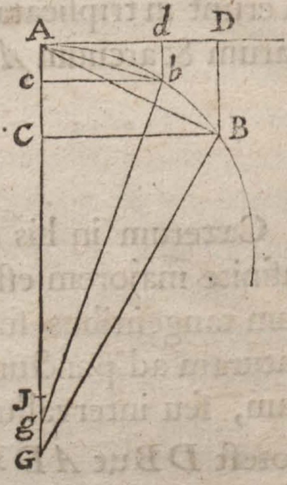
Subtensa evanescens anguli contactus est ultimo in ratione duplicata subtensæ arcus contermini. f

Cas. 1. Sit arcus ille AB, tangens ejus AD, subtensa anguli contactus ad tangentem perpendicularis BD, subtensa arcus AB. Huic subtensæ AB & tangenti AD perpendiculares erigantur AG, BG, concurrentes in G; dein accedant puncta D, B, G, ad puncta d, b, g, sitq; J intersectio linearum BG, AG ultimo facta ubi puncta D, B accedunt usq; ad A. Manifestum est quod distantia

* ipso nempe motus initio, et tempore aliquo finito propius, ~~[illegible]~~ ut est magis exigua virium perturbantium variatio.

(118)

tia G J minor esse potest quam assignata quævis. Est autem (ex natura circulorum per puncta ABG, Abg transeuntium) AB quad. æquale AG x BD & Ab quad. æquale Ag x bd, adeoq; ratio AB quad. ad Ab quad. componitur ex rationibus AG ad Ag & BD ad bd. Sed quoniam JG assumi potest minor longitudine quavis assignata, fieri potest ut ratio AG ad Ag minus differat a ratione æqualitatis quam pro differentia quavis assignata, adeoq; ut ratio AB quad. ad Ab quad. minus differat a ratione BD ad bd quam pro differentia quavis assignata. Est ergo, per Lemma I, ratio ultima AB quad. ad Ab quad. æqualis rationi ultimæ BD ad bd. Q. E. D.



Cas. 2. Inclinetur jam BD ad AD in angulo quovis dato, & eadem semper erit ratio ultima BD ad bd quæ prius, adeoq; eadem ac AB quad. ad Ab quad. Q. E. D. sed recta BD semper ad datum punctum convergat, vel alia quacunque lege constituatur,

Cas. 3. Et quamvis angulus D non detur, tamen anguli D, d h, v. constituti ad æqualitatem semper vergent & propius accedent ad invicem quam pro differentia quavis assignata, adeoq; ultimo æquales erunt, per Lem. I. & propterea lineæ BD, bd in eadem ratione ad invicem ac prius. Q. E. D. evanescente scilicet arcu Bb (125)

Corol. 1. Unde cum tangentes AD, Ad, arcus AB, Ab & eorum sinus BC, bc fiant ultimo chordis AB, Ab æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut subtensæ BD, bd.

**Corol.* 2. Triangula rectilinea ADB, Adb sunt ultimo in triplicata ratione laterum AD, Ad, inq; sesquiplicata laterum DB, db: Utpote in composita ratione laterum AD & DB, Ad & db existentia. Sic & triangula ABC, Abc sunt ultimo in triplicata ratione laterum BC, bc.

Corol. 3. Et quoniam DB, db sunt ultimo parallelæ & in duplicata ratione ipsarum AD, Ad; erunt areæ ultimæ curvilineæ s in C etc (126)

F A

* Cor. a Eorundem quadrata sunt etiam ultimo ut arcuum sagittæ, quæ chordas bisecant et ad datum punctum convergunt. Nam sagittæ illæ sunt ut subtensæ BD, bd.
Cor. b. Ideoque sagitta est in duplicata ratione temporis quo vo p. velocitate dq arcum

ADB, *Adb* (ex natura Parabolæ*) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum *ADB*, *Adb*, & segmenta *AB*, *Ab* partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ & hæc segmenta erunt in triplicata ratione tum tangentium *AD*, *Ad*; tum chordarum & arcuum *AB*, *Ab*.

Scholium.

6

Cæterum in his omnibus supponimus angulum contactus nec infinite majorem esse angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus suis, nec iisdem infinite minorem; hoc est curvaturam ad punctum *A*, nec infinite parvam esse nec infinite magnam, seu intervallum *AJ* finitæ esse magnitudinis. Capi enim potest *DB* ut AD^3: quo in casu circulus nullus per punctum *A* inter tangentem *AD* & curvam *AB* duci potest,† proindeq; angulus contactus erit infinite minor circularibus. Et simili argumento si fiat *DB* successive ut AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, &c. habebitur series angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinite minor priore. Et si fiat *DB* successive ut AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia series infinita angulorum contactus, quorum primus est ejusdem generis cum circularibus, secundus infinite major, & quilibet posterior infinite major priore. Sed & inter duos quosvis ex his angulis potest series utrinq; in infinitum pergens angulorum intermediorum inseri, quorum quilibet posterior erit infinite major minorve priore. Ut si inter terminos AD^2 & AD^3 inseratur series $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$, $AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rursus inter binos quosvis angulos hujus seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium.

N. B. Neq; novit natura limitem.

Quæ de curvis lineis deq; superficiebus comprehensis demonstrata sunt, facile applicantur ad solidorum superficies curvas & con-

* *Nam arcus evanescens spectari potest tanquam arcus parabolæ cujus latus rectum est æquale diametro circuli osculantis.* A.J. (130)

† *Generaliter, sint [illegible] æquationes* $a^m x = y^{m+1}$ *et* $b^{m+n} x = z^{m+n+1}$, *sequitur esse* $z^n : \frac{b^{m+n}}{a^m} :: y^m$ [...] *et quamdiu* z^n *minor sit* $\frac{b^{m+n}}{a^m}$, *cadere priorem intra posteriorem curvam; prioris aut*[...] *augendo a potest sine fine minui angulus contactûs* (132-3)

contenta. Præmisi vero hæc Lemmata ut effugerem tædium deducendi ~~perplexas~~ longas demonstrationes, more veterum Geometrarum, ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium. Sed quoniam durior est indivisibilium Hypothesis; & propterea Methodus illa minus Geometrica censetur, malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas & rationes, primasq; nascentium, id est, ad limites summarum & rationum deducere, & propterea limitum illorum demonstrationes qua potui breuitate præmittere. His enim idem præstatur quod per methodum indivisibilium, & principiis demonstratis jam tutius utemur. Proinde in sequentibus, siquando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas, nolim indivisibilia sed evanescentia divisibilia, non summas & rationes partium determinatarum, sed summarum & rationum limites semper intelligi, vimq; talium demonstrationum ad methodum præcedentium Lemmatum semper revocari.

Objectio est, quod quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non est ultima, ubi evanuerunt, nulla est. Sed & eodem argumento æque contendi posset nullam esse corporis ad certum locum veni pergentis velocitatem ultimam. Hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam, ubi attigit, nullam esse. Et responsio facilis est. Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur neq; antequam attingit locum ultimum & motus cessat, neq; postea, sed tunc cum attingit, id est illam ipsam velocitatem quacum corpus attingit locum ultimum & quacum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium intelligendam esse rationem quantitatum non antequam evanescunt, non postea, sed quacum evanescunt. Pariter & ratio prima nascentium est ratio quacum nascuntur. Et summa prima & ultima est quacum esse (vel augeri ~~&~~ aut minui) incipiunt & cessant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere potest, non autem transgredi.

 Hæc

Hæc est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & cessantium. Cumq; hic limes sit certus & definitus, Problema est vere Geometricum eundem determinare. Geometrica vero omnia in aliis Geometricis determinandis ac demonstrandis legitime usurpantur.

Contendi etiam potest, quod si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines; & sic quantitas omnis constabit ex indivisibilibus, contra quam *Euclides* de incommensurabilibus, in libro decimo Elementorum, demonstravit. Verum hæc Objectio falsæ innititur hypothesi. Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant, & quas propius assequi possunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero transgredi, neq; prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum. Res clarius intelligetur in infinite magnis. Si quantitates duæ quarum data est differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimæ seu maximæ quarum ista est ratio. Igitur in sequentibus, siquando facili rerum imaginationi consulens, dixero quantitates quam minimas, vel evanescentes vel ultimas, cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite.

SECT