SECT. II.

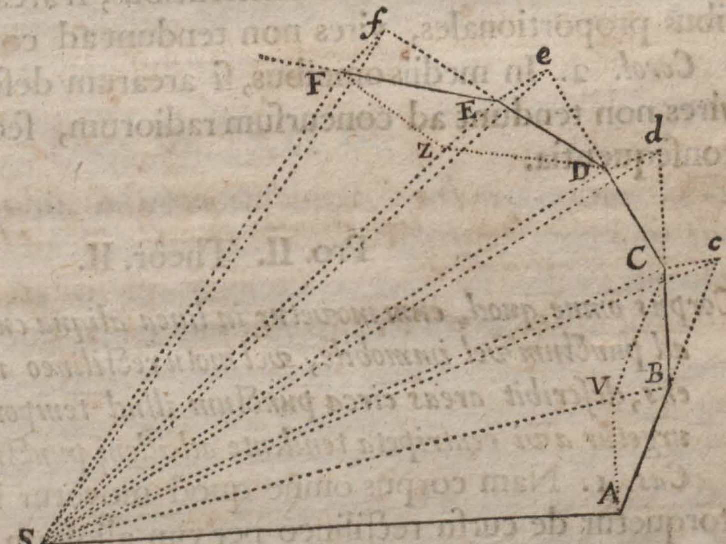
7

De Inventione Virium Centripetarum. — b

Prop. I. Theorema. I.

Areas quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis deſcribunt, & in planis immobilibus conſiſtere, & eſſe temporibus proportionales. f

Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte deſcribat corpus vi inſita rectam *AB*. Idem ſecunda temporis parte, ſi nil impediret, recta pergeret ad *c*, (per Leg. I) deſcribens lineam *Bc* æqualem ipſi *A*B, adeo ut radiis *AS*, B*S*, *cS* ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ *A*SB, B*Sc*. Verum ubi corpus venit ad B, agat vis centripeta impulſu unico ſed magno, faciatq; corpus a recta B*c* deflectere & pergere in recta B*C*. Ipſi B*S* parallela agatur *cC* occurrens B*C* in *C*, & completa ſecunda temporis parte, corpus (per Legum Corol. I) reperietur in *C*, in eodem plano cum triangulo A*SB*. Junge *SC*, & triangulum *SBC*, ob parallelas S*B*, *Cc*, æquale erit triangulo *SBc*, atq; adeo etiam triangulo *SAB*. Simili argumento ſi vis



vis centripeta successive agat in C, D, E, &c. faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas CD, DE EF, &c. jacebunt hæ in eodem plano, & triangulum SCD triangulo SBC & SDE ipsi SCD & SEF ipsi SDE æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto describuntur: & componendo, sunt arearum summæ quævis $SADS$, $SAFS$ inter se, ut sunt tempora descriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum, & eorum ultima perimeter ADF, (per Corollarium quartum Lemmatis tertii) erit linea curva; adeoq; vis centripeta qua corpus de tangente hujus curvæ perpetuo retrahitur, aget indesinenter; areæ vero quævis descriptæ $SADS$, $SAFS$ temporibus descriptionum semper proportionales, erunt iisdem temporibus in hoc casu proportionales. *Q. E. D.*

+ *Corol.* 1. In mediis non resistentibus, si areæ non sunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concursum radiorum: sed*

+ *Corol.* 2. In mediis ~~omnibus~~ etiam resistentibus, si arearum descriptio acceleratur, vires non tendunt ad concursum radiorum, sed inde declinant in consequentia.

Cor. 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti est reciprocè ut perpendiculum a centro illo in orbis tangentem demissum. est enim ut AB & bases triangulorum æqualium.

Cor. 2. Si arcuum duorum evanescentium æqualibus [illegible] successive [illegible] chordæ AB, BC [illegible] hujus [illegible] BV transibit [illegible] viriuum

Cor. 3. Vires in B & E sunt ad invicem in ultimâ ratione [illegible] BV, EZ ex vi [illegible] oriundorum.

Cor. 4. Atque etiam ~~et~~ eorum semissium, quæ sunt arcuum ~~[illegible]~~ evanescentium æqualibus [illegible] [illegible] sagittæ chordas bisecantes, et convergentes ad centrum virium.

Pro. II. Theor. II.

Corpus omne, quod, ~~cum~~ movetur in linea aliqua curva, in plano descripta *& radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, describit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur a vi centripeta tendente ad idem punctum.* h

Cas. 1. Nam corpus omne quod movetur in linea curva, detorquetur de cursu rectilineo per vim aliquam in ipsum agentem. (per Leg. 1.) Et vis illa qua corpus de cursu rectilineo detorquetur & cogitur triangula quam minima SAB, SBC, SCD &c. circa punctum immobile S, temporibus æqualibus æqualia describere, agit in loco B secundum lineam parallelam ipsi cC (per Prop. ~~40~~ 39 Lib. I Elem. & Leg. II.) hoc est secundum lineam

Cor. 5 Ideoque vires eædem sunt ad vim gravitatis, ut hæ sagittæ ad sagittas horizonti perpendiculares arcuum parabolicorum, quos projectilia eodem [illegible] quam minimo? [illegible]

Cor. 6. Eadem omnia obtinent (per Leg. Cor. 5) ubi plana, in quibus [illegible] una cum [illegible] virium, quæ in ipsis sita sunt, non quiescunt, sed [illegible]

B

B S, & in loco *C* ſecundum lineam ipſi *d D* parallelam, hoc eſt ſecundum lineam *C S*, &c. Agit ergo ſemper ſecundum lineas tendentes ad punctum illud immobile *S*. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Et, per Legum Corollarium quintum, perinde eſt ſive quieſcat ſuperficies in qua corpus deſcribit figuram curvilineam, ſive moveatur eadem una cum corpore, figura deſcripta & puncto ſuo *S* uniformiter in directum.

* inde declinant in consequentia, seu versus plagam in quam fit motus, si modo arearum descriptio acceleratur; sin retardatur, in antecedentia.

Scholium.

Urgeri poteſt corpus a vi centripeta compoſita ex pluribus viribus. In hoc caſu ſenſus Propoſitionis eſt, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum *S*. Porro ſi vis aliqua *perpetuo* agat ſecundum lineam ſuperficiei deſcriptæ perpendicularem, hæc faciet corpus deflectere a plano ſui motus, ſed quantitatem ſuperficiei deſcriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compoſitione virium negligenda eſt.

Prop. III. Theor. III.

Corpus omne quod, radio ad centrum corporis alterius utcunq; moti ducto, deſcribit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compoſita ex vi centripeta tendente ad corpus alterum & ex vi omni acceleratrice, qua corpus alterum urgetur.

Nam (per Legum Corol. 6.) ſi vi nova, quæ æqualis & contraria ſit illi qua corpus alterum urgetur, urgeatur corpus utrumq; ſecundum lineas parallelas, perget corpus primum deſcribere circa corpus alterum areas eaſdem ac prius: vis autem qua corpus alterum urgebatur, jam deſtruetur per vim ſibi æqualem & contrariam, & propterea (per Leg. 1.) corpus illud alterum vel quieſcet vel movebitur uniformiter in directum, & corpus primum, urgente differentia virium, perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum deſcribere. Tendit igitur (per Theor. 2.) differentia virium ad corpus illud alterum ut centrum. *Q. E. D.*

Co-

Corol. 1. Hinc si corpus unum radio ad alterum ducto describit areas temporibus proportionales, atq; de vi tota (sive simplici, sive ex viribus pluribus, juxta Legum Corollarium secundum, composita,) qua corpus prius urgetur, subducatur (per idem Legum Corollarium) vis tota acceleratrix qua corpus alterum urgetur; vis omnis reliqua qua corpus prius urgetur tendet ad corpus alterum ut centrum.

Corol. 2. Et si areæ illæ sunt temporibus quamproxime proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum quamproxime.

Corol. 3. Et vice versa, si vis reliqua tendit quamproxime ad corpus alterum, erunt areæ illæ temporibus quamproxime proportionales.

Corol. 4. Si corpus radio ad alterum corpus ducto describit areas quæ, cum temporibus collatæ, sunt valde inæquales, & corpus illud alterum vel quiescit vel movetur uniformiter in directum; actio vis centripetæ ad corpus illud alterum tendentis, vel nulla est, vel miscetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: Visq; tota ex omnibus, si plures sunt vires, composita, ad aliud (sive immobile sive mobile) centrum dirigitur, circum quod æquabilis est vel quamproxime arearum descriptio. Idem obtinet ubi corpus alterum motu quocunq; movetur, si modo vis centripeta sumatur, quæ restat post subductionem vis totius agentis in corpus illud alterum.

Scholium

Quoniam æquabilis arearum descriptio Index est centri quod vis illa respicit qua corpus maxime afficitur, corpus autem vi ad hoc centrum tendente retinetur in orbita sua, & motus omnis circularis recte dicitur circa centrum illud fieri, cujus vi corpus retrahitur de motu rectilineo & retinetur in Orbita: quidni usurpemus in sequentibus æquabilem arearum descriptionem ut Indicem centri circum quod motus omnis circularis in spatiis liberis peragitur?

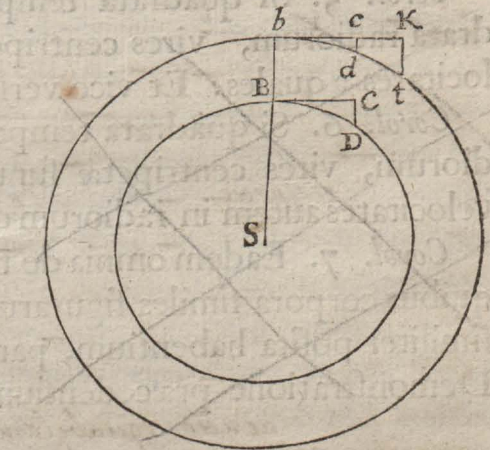
Prop.

Prop. IV. Theor. IV.

Corporum quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere, & esse inter se ut arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.

[~~Corpora *B*, *b* in circumferentiis circulorum *BD*, *bd* gyrantia, simul describant arcus *BD*, *bd*. Quoniam sola vi insita describerent tangentes *BC*, *bc* his arcubus æquales, manifestum est quod vires centripetæ sunt quæ perpetuo retrahunt corpora de tangentibus ad circumferentias circulorum, atq; adeo hæ sunt ad invicem in ratione prima spatiorum nascentium *CD*, *cd*~~ :] tendunt hæ vires ~~vero~~ ad centra circulorum per Theor. II, propterea quod areæ radiis descriptæ ponuntur temporibus proportionales.* [~~Fiat figura *tkb* figuræ *DCB* similis, & per Lemma V, lineola *CD* erit ad lineolam *kt* ut arcus BD ad arcum *bt*: nec non, per Lemma XI, lineola nascens *tk* ad lineolam nascentem *dc* ut *bt quad.* ad *bd quad.* & ex æquo lineola nascens *DC* ad lineolam nascentem *dc* ut BD × *bt* ad *bd quad.* seu quod perinde est, ut~~ $\cancel{\frac{BD \times bt}{Sb}}$ ~~ad~~ $\cancel{\frac{bd\ quad.}{Sb}}$, ~~adeoq; (ob æquales rationes~~ $\cancel{\frac{bt}{Sb}}$ ~~&~~ $\cancel{\frac{BD}{SB}}$ ~~) ut~~ $\cancel{\frac{BD\ quad.}{SB}}$ ~~ad~~ $\cancel{\frac{bd}{Sb}}$ ~~*quad.*~~]

*et sunt inter se ut arcuum æqualibus [illegible] quam [illegible] sinus versi (Cor. 4 Prop. 1) hoc est, ut [illegible] arcuum eorundem ad [illegible] applicata (Lem. 7.) et [illegible] cum hi arcus [illegible] ut arcus [illegible] quibusvis æqualibus [illegible], et [illegible] ut eorum radii, vires [illegible] ut arcuum [illegible] quadrata applicata ad [illegible]



Q. E. D.

Corol. 1. Hinc vires centripetæ sunt ut velocitatum quadrata applicata ad radios circulorum.

Corol. 2. Et reciproce ut quadrata temporum periodicorum appliplicata ad radios ita sunt hæ vires inter se. Id est (ut cum Geometris loquar) hæ vires sunt in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum directe & ratione simplici radiorum inverse: ++ necnon in ratione composita ex ratione simplici radiorum directe & ratione duplicata temporum periodicorum inverse.

Corol. 3. Unde si tempora periodica æquantur, *ideoque velocitates sint ut radii, etiam* erunt ~~tum~~ vires centripetæ ~~tum velocitates~~ ut radii, & vice versa.

Corol. 4. Si ~~quadrata~~ *et* tempor~~um~~*a* periodic~~orum sunt ut radii,~~*a et velocitates sint in ratione subduplicata [illegible]* vires centripetæ sunt æquales, ~~& velocitates in dimidiata ratione radiorum~~: Et vice versa.

Corol. 5. Si ~~quadrata~~ tempor~~um~~*a* periodic~~orum~~*a* sunt ut ~~quadrata~~ radi~~orum,~~*i*, vires centripetæ sunt reciproce ut radii, *propterea* & velocitates æquales: Et vice versa.

Corol. 6. Si ~~quadrata~~ tempor~~um~~*a* periodic~~orum~~*a* sunt *in ratione sesquiplicata* ~~ut cubi~~ radiorum, vires centripetæ sunt reciproce ut quadrata radiorum; *et propterea* velocitates ~~autem~~ *reciproce* in radiorum dimidiata ratione: Et vice versa.

**Corol.* 7. Eadem omnia de temporibus, velocitatibus & viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcunq; similium, centraq; similiter posita habentium, partes describunt, consequuntur ex Demonstratione præcedentium ad hosce casus applicata. *Applicatur autem substituendo æquabilem arearum [illegible] pro æquabili motu, et distantias [illegible] a [illegible] pro radiis usurpando.* ♆

**Cor. a. Universaliter, si [illegible] sit ut r^n ideoque velocitas reciproce ut r^{n-1} erit vis [illegible] reciproce ut r^{2n-1}: & contra*

♆ Cor. b. Consequitur etiam, quod arcus, quem [illegible] data vi [illegible] quovis [illegible] medius est [illegible] et [illegible] eadem data vi eodemque [illegible] cadendo confectum. Nam spatium cadendo est ut [illegible] quadratum (198)

Scholium

Casus Corollarii sexti obtinet in corporibus cælestibus (ut seorsum colligerunt etiam nostrates *Wrennus*, *Hookius* & *Hallæus*) & propterea quæ spectant ad vim centripetam decrescentem in duplicata ratione distantiarum a centris decrevi fusius in sequentibus exponere.

Porro præcedentis demonstrationis *et Corollariorum ejus* beneficio colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis est ea gravitatis. Nam* ~~cum vis illa, quo tempore corpus percurrit arcum BC, impellat ipsum per spatium CD, quod ipso motus initio æquale est quadrato arcus illius BD ad circuli diametrum applicato; & corpus omne vi eadem in eandem semper plagam~~ con-

♆ Hoc demonstratur per Cor. 1 Lem. 11 ubendo arcu simili evanescente pro medio termino. At quoniam tempora non sint ut arcus, de arcubus tantum evanescentibus verum est (194)

** si corpus in circulo terræ concentrico vi gravitatis suæ revolvatur, hæc gravitas est ipsius vis centripeta. Datur autem ex descensu gravium, et tempus revolutionis unius, et arcus dato quovis tempore descriptus, per Cor. b*

~~continuata, describat spatia in duplicata ratione temporum: Vis illa, quo tempore corpus revolvens arcum quemvis datum describit, efficiet ut corpus idem recta progrediens describat spatium quadrato arcus illius ad circuli diametrum applicato æquale; adeoq; est ad vim gravitatis ut spatium illud ad spatium quod grave cadendo eodem tempore describit.~~) Et hujusmodi Propositionibus *Hugenius*, in eximio suo Tractatu de Horologio oscillatorio, vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

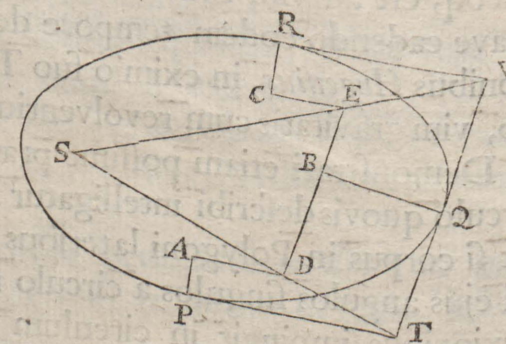
Demonstrari etiam possunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis describi intelligatur Polygonum laterum quotcunq; Et si corpus in Polygoni lateribus data cum velocitate movendo, ad ejus angulos singulos a circulo reflectatur; vis qua singulis reflexionibus impingit in circulum erit ut ejus velocitas, adeoq; summa virium in dato tempore erit ut velocitas illa & numerus reflexionum conjunctim, hoc est (si Polygonum detur specie) ut longitudo dato illo tempore descripta & longitudo eadem applicata ad Radium circuli, id est ut quadratum longitudinis illius applicatum ad Radium; adeoq; si Polygonum lateribus infinite diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore descripti applicatum ad radium. Hæc est vis qua corpus urget circulum, & huic æqualis est vis contraria qua circulus continuo repellit corpus centrum versus.

Prop. V. Prob. I.

Data quibuscunq; in locis velocitate, qua corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus describit, centrum illud invenire. h

Figuram descriptam tangant rectæ tres PT, TQV, VR in punctis totidem P, Q, R, concurrentes in T & V. Ad tangentes erigantur perpendicula PA, QB, RC, velocitatibus corporis in punctis illis P, Q, R a quibus eriguntur reciproce proportionalia; id est ita ut sit PA ad QB ut velocitas in Q ad velocitatem in P, & QB ad RC ut velocitas in R ad velocitatem in Q. Per perpendiculorum terminos A, B, C ad angulos rectos ducantur AD, DBE, EC concurrentia in D & E: Et actæ TD, VE concurrent in centro quæsito S.

Nam ~~cum corpus in P & Q radiis ad centrum ductis areas describat temporibus proportionales, sintq; areæ illæ simul descriptæ ut velocitates in P & Q ductæ respective in~~ perpendicula a centro in tangentes PT, QT demissa: ~~Erunt perpendicula illa~~ (Cor. 1. Pr. 1) sunt ut velocitates in punctis P & Q reciproce, adeoq; ut perpendicula AP, BQ directe, id est ut perpendicula a puncto D in tangentes demissa. Unde facile colligitur quod puncta S, D, T sunt in una recta. Et simili argumento puncta S, E, V sunt etiam in una recta; & propterea centrum S in concursu rectarum TD, VE versatur. $Q. E. D.$



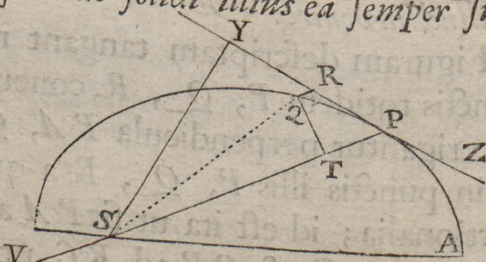
Pro. VI. Theor. V.

Si corpus in spatio non resistente circa centrum immobile in orbe quocunque revolvatur,*

Cor. 1. *Si corpus ~~P~~ revolvendo circa centrum ~~S~~, describat lineam quamvis curvam ~~APQ~~, tangat vero recta ZPR curvam illam in puncto quovis P, & ad tangentem ab alio quovis curvæ puncto Q agatur QR distantiæ SP parallela, ac demittatur QT perpendicularis ad distantiam SP:* dico ~~*Dico quod*~~ *vis centripeta* ~~*fit*~~ *erit reciproce ut solidum* $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$, *si modo solidi illius ea semper sumatur quantitas quæ ultimo fit ubi coeunt puncta P & Q.*

f

~~Namq; in figura indefinite parva $QRPT$ lineola nascens QR, dato tempore, est ut vis centripeta (per Leg. II.) &~~



da-

* et arcum quemvis jamjam nascentem tempore quam minimo ... et sagitta arcus duci ... quæ ... bisecet, et ... transeat ... virium: erit vis ... in medio arcus, ut sagitta directe, et tempus quadratum inversè. / Nam sagitta dato ... est ut vis (Cor. 4. Pr. 1) et datâ vi ut ... (Cor. 6. Lem. 11) x 8 & 7 Cor. Prop. 4 ideoque ut vis et ... conjunctim. Ergo sequitur Q.e.d. Patet etiam

x Cor 4. Lem. 10

Nam QR æqualis est sagittæ dupli arcus QP, in cujus medio est P

~~data vi, ut quadratum temporis (per Lem. X.) atq; adeo, neutro dato, ut vis centripeta & quadratum temporis conjunctim, adeoq; vis centripeta ut lineola QR directe & quadratum temporis inverse.~~ Est autem tempus ut area *dupla* SPQ, ~~ejusve dupla~~ *sive* SP x QT, id est ut SP & QT conjunctim, adeoq; vis centripeta ut QR directe atq; SP *quad.* in QT *quad.* inverse, id est ut $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$ inverse. ~~Q. E. D.~~ *

** Cor. 2. Erit etiam vis centripeta ut solidum $\frac{\overline{SY}^2 \times \overline{QP}^2}{QR}$, triangula PSY, PQT enim similia*

Corol.5. Hinc si detur figura quævis, & in ea punctum ad quod vis centripeta dirigitur; inveniri potest lex vis centripetæ quæ corpus in figuræ illius perimetro gyrari faciet. Nimirum computandum est solidum $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$ *vel solidum SYquad x PV* huic vi reciproce proportionale. Ejus rei dabimus exempla in problematis sequentibus.

Cor. 3. Si orbis vel circulus est, vel ab eo osculatur in puncto P; et ejus chorda sit PV erit vis centripeta ut $\overline{SY}^2 \times PV$. ψ

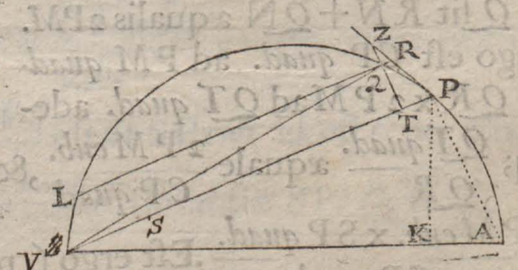
Cor. 4. Iisdem positis erit ut Velocitas quadrata directe, et chorda illa inverse (Cor 1. Pr. 1)

ψ 35. III. Euc. Elem.

Prop. VII. Prob. II.

Gyretur corpus in circumferentia circuli, requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum aliquod ~~in circumferentia~~ datum.

Esto circuli circumferentia ~~§~~ V QPA, centrum vis centripetæ S, corpus in circumferentia latum P, locus proximus in quem movebitur Q. *Per punctum S ducatur VPV.* Ad diametrum ~~§~~ VA & rectam SP demitte perpendicula PK, QT, & per Q ipsi SP parallelam age LR occurrentem circulo in L & tangenti PR in R, & coeant TQ, PR in Z. *Jungatur AP.*



Ob similitudinem triangulorum ZQR, ZTP, ~~§~~ V PA erit RP *quad.* (hoc est QRL) ad QT *quad.* ut ~~§~~ VA *quad.* ad ~~§~~ VP *quad.* Ergo $\frac{QRL \times V§P\ quad.}{V§A\ quad.}$ æquatur QT *quad.* Ducantur hæc æqualia

lia in $\frac{SP\ quad.}{QR}$, & punctis P & Q coeuntibus, scribatur ~~S~~V P pro RL

Sic fiet $\frac{SP\,q \times \overline{PV}^3}{VS\,Aq}$ æquale $\frac{QT\,q \times SP\,q}{QR}$. Ergo (per Corol. 1 Theor. V.)

(Illud dari necesse esse patet ex 2 & 7 Prop 4)

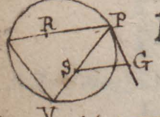
vis centripeta reciproce est ut $\frac{SP\,q \times \overline{PV}^3}{VS\,Aq}$, id est (ob datum ~~S~~V A *quad*) *et cubus chordæ PV conjunctim.*

ut quadrat~~o cubus~~um distantiæ SP. Quod erat inveniendum.

Cor. 1 Hinc si S sit in Circumferentiâ, puta ad V; erit vis ut quadrato-cubus SP

Cor. 2 Dato tempore periodico vis in S est ad vim in R ut $\overline{RP}^2 \times SP$ ad*

Prop. VIII. Prob. III.

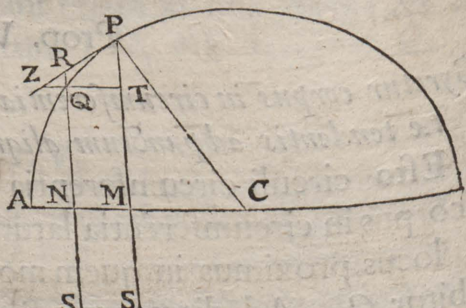


$\overline{SG}^3$, quæ, ipsi RP parallela, tangenti occurrit in G: ob similia $\triangle$s, PSG, TPV.

Cor. 3 Idem obtinet in orbe quocunque: vires enim eædem sunt ac in circulo osculante PTV.

Moveatur corpus in circulo P Q A : ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum, ut lineæ omnes PS, RS *ad id ductæ, pro parallelis haberi possint.*

A circuli centro C agatur semidiameter CA parallelas istas perpendiculariter secans in M & N, & jungatur CP. Ob similia triangula CPM, RZQ & TPZ, ~~vel (per Lem. VIII.) TPQ~~, est CP*q.* ad PM*q.* ut ~~PQ q. vel (per Lem. VII.)~~ PR*q.* ad QT*q.* & ex natura circuli rectangulum QR × RN + QN æquale est PR quadrato. Coeuntibus autem punctis P, Q fit RN + QN æqualis 2PM. Ergo est CP *quad.* ad PM *quad.* ut QR × 2PM ad QT *quad.* adeoq; $\frac{QT\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2\,PM\ cub.}{CP\ quad.}$, & $\frac{QT\ quad. \times SP\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2\,PM\ cub. \times SP\ quad.}{CP\ quad.}$. Est ergo (per Corol. 1 Theor. V.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2\,PM\ cub. \times SP\ quad.}{CP\ quad.}$ hoc est (neglecta ratione determinata $\frac{2\,SP\ quad.}{CP\ quad.}$) reciproce ut PM *cub.* Q. E. J. *Atque idem facile colligitur etiam ex propositione præcedente.*



Scho-

Scholium.

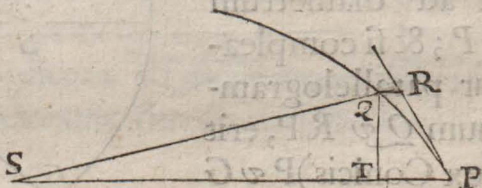
haud multum dissimili

Et ~~simili~~ argumento corpus movebitur in Ellipsi vel etiam in Hyperbola vel Parabola, vi centripeta quæ sit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.*

* Hoc demonstratur (I pg 134-5) ~~(224)~~

Prop. IX. Prob. IV.

Gyretur corpus in spirali P *QS secante radios omnes* SP, S*Q*, *&c. in angulo dato: Requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum spiralis.* b



Detur angulus indefinite parvus* PS*Q*, & ob datos omnes angulos dabitur specie figura SP*QRT*. Ergo datur ratio $\frac{QT}{RQ}$, estq; $\frac{QT\ quad.}{QR}$ ut QT, hoc est ut SP. Mutetur jam utcunq; angulus PS*Q*, & recta *QR* angulum contactus *Q*P*R* subtendens mutabitur (per Lemma XI.) in duplicata ratione ipsius P*R* vel *QT*. Ergo manebit $\frac{QT\ quad.}{QR}$ eadem quæ prius, hoc est ut SP. Quare $\frac{QTq \times SPq}{QR}$ est ut SP *cub.* id est (per Corol. 1 Theor. V.) vis centripeta est reciprocè ut cubus distantiæ SP. *Q. E. J.*

Lemma XII.

Parallelogramma omnia circa datæ Ellipseos vel Hyperbolæ diametros quasvis conjugatas descripta esse inter se æqualia. ~~*Idem intellige de Parallelogrammis in Hyperbola circum diametros ejus descriptis.*~~ f

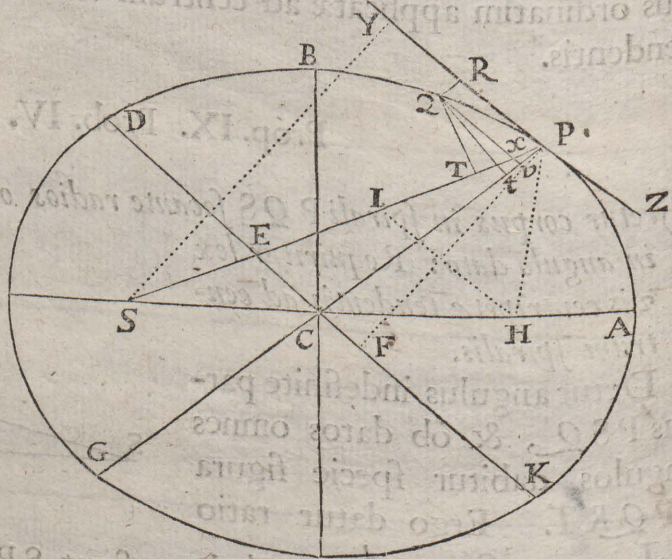
Constat ~~utrumq;~~ ex Conicis. Prop

* Scilicet ut QP recta possit haberi, et triangula PQP, PQR specie dari; nam ex datis angulis non datur specie trapezium PQRP.

Prop. X. Prob. V.

Gyretur corpus in Ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum Ellipseos.

Sunto* CA, CB semiaxes Ellipseos; GP, DK diametri conjugatæ; PF, Qt perpendicula ad diametros; Qv ordinatim applicata ad diametrum GP; & si compleatur parallelogrammum $QvRP$, erit (ex Conicis) PvG ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (ob similia triangula Qvt, PCF) Qv *quad.* est ad Qt *quad.* ut PC *quad.* ad PF *quad.* & conjunctis rationibus, PvG ad Qt *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & PC *quad.* ad PF *quad.* id est vG ad $\frac{Qt\ quad.}{Pv}$ ut PC *quad.* ad $\frac{CDq \times PFq}{PCq}$. Scribe QR pro Pv, & (per Lemma xii.) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$, nec non (punctis P & Q coeuntibus) $2PC$ pro vG, & ductis extremis & medijs in se mutuo, fiet $\frac{Qtq \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2\,BCq \times CAq}{PC}$. Est ergo (per Corol. 1 Theor. V.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2\,BCq \times CAq}{PC}$, id est,



* Brevior demonstratio ita fit. Vis est reciprocè ut PF quad. et chorda circuli osculantis per centrum virium conjunctim; hæc autem ~~est~~ æquatur $\frac{2\,CDq.}{CP}$, et PF quad. = $\frac{BCq. \times CAq.}{CDq.}$: sequitur vim esse ut CP. (Robertson's Con. Sec. 197)

(ob

(ob datum $2\,BCq. \times CAq.$) ut $\frac{1}{PC}$, hoc eſt, directe ut diſtantia PC. *Q. E. I.*

Corol. 1. Unde viciſſim ſi vis* ſit ut diſtantia, movebitur corpus in Ellipſi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo, in quem Ellipſis migrare poteſt.ψ

Corol. 2. Et æqualia erunt revolutionum in ~~Figuris~~ *Ellipsibus* univerſis circa centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in Ellipſibus ſimilibus æqualia ſunt per Corol. 3 & 7 Prop. IV: In Ellipſibus autem communem habentibus axem majorem, ſunt ad invicem ut Ellipſeon areæ totæ directe & arearum particulæ ſimul deſcriptæ inverſe; id eſt ut axes minores directe & corporum velocitates in verticibus principalibus† inverſe, hoc eſt ut axes illi directe & ordinatim applicatæ ad *idem punctum* * *axis communis* * ~~axes alteros~~ inverſe, & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inverſarum) in ratione æqualitatis.

† *Lem. 8*

* *quoniam vires æquantur*

Scholium.

Si Ellipſis, centro in infinitum abeunte, vertatur in Parabolam, corpus movebitur in hac Parabola, & vis ad centrum infinite diſtans jam tendens, evadet æquabilis. Hoc eſt Theorema *Galilei.* Et ſi Coniſectio Parabolica, inclinatione plani ad conum ſectum mutata, vertatur in Hyperbolam, movebitur corpus in hujus perimetro, vi centripeta in centrifugam verſa. *Et quemadmodum in Circulo vel Ellipsi si vires tendunt ad centrum figuræ in abscissa positum, hæ vires augendo vel [illegible] ordinatas [illegible] quacunque data, vel etiam mutando [illegible] inclinationis [illegible] ad abscissam, [illegible] augentur vel [illegible] distantiarum a [illegible] si modo [illegible] maneant æqualia; sic etiam [illegible] si [illegible] augeantur vel [illegible] quacunque [illegible] vel [illegible] utcunque [illegible] vires ad [illegible] quodcunque [illegible] abscissæ [illegible] augentur vel [illegible] distantiarum a centro.**

* *Nam si ex his quinque, vis centripetæ quantitate absolutâ, illius directione, velocitate corporis, positione tangentis, & curvaturâ, quatuor data fuerint, quintum determinatum est: (243) additaque lege variationis, determinata ac unica est curva, quam corpus describere potest. (244)*

ψ *Utique si radius fuerit tangenti normalis; eaque velocitas corporis, quam acquireret cadendo per dimidium radium. (245.) Nam velocitate acquisita cadendo per x, percurreretur eodem [illegible] arcus $2x$: at (Cor. 6 Prop. 4) $4x^2 = 2rx \therefore x = \frac{r}{2}$ (199)*

* *Demonstratur (259)*